

Γραμμική Άλγεβρα Ι

Φροντιστηριακές ασκήσεις #3, Νοέμ. 2015, Θέμα: Ορίζουσες

1. Να υπολογίσετε την ορίζουσα του πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & 4 \\ 2 & -1 & 4 & -8 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

2. Να υπολογίσετε την ορίζουσα του πίνακα

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Αν α, β, γ είναι πραγματικοί αριθμοί τότε να δείξετε ότι

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha^2 & \beta^2 & \gamma^2 \end{vmatrix} = (\beta - \alpha)(\gamma - \alpha)(\gamma - \beta).$$

4. Να υπολογίσετε την ορίζουσα $\begin{vmatrix} 1 + \alpha_1\beta_1 & 1 + \alpha_1\beta_2 & 1 + \alpha_1\beta_3 \\ 1 + \alpha_2\beta_1 & 1 + \alpha_2\beta_2 & 1 + \alpha_2\beta_3 \\ 1 + \alpha_3\beta_1 & 1 + \alpha_3\beta_2 & 1 + \alpha_3\beta_3 \end{vmatrix}$.

5. Θεωρούμε ένα πίνακα $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ που ικανοποιεί την σχέση $A^2 + 2A = O$. Να δείξετε ότι ο πίνακας $A + I_3$ είναι αντιστρέψιμος, να βρείτε τον $(A + I_3)^{-1}$, και να υπολογίσετε την ορίζουσα του A .

6. Να λυθεί η εξίσωση $\begin{vmatrix} 2-x & 1 & 1 \\ 1 & 2-x & 1 \\ 1 & 1 & 2-x \end{vmatrix} = 0$.

7. Να δείξετε ότι η ορίζουσα του πίνακα $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & 0 & c & d \\ 0 & 0 & 0 & e & f \\ g & i & j & k & l \\ m & n & p & q & r \end{pmatrix}$ είναι μηδέν.

8. Να υπολογίσετε την $n \times n$ ορίζουσα $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \end{vmatrix}$.